векторы $\vec{\xi}_\alpha = \xi^i_\alpha \vec{\Lambda}_i$ коллинеарны вектору $\vec{\xi}_{n+2} = \xi^i_{n+2}\vec{\Lambda}_i$. При таком предположении

$$\xi^i_\alpha = \gamma_\alpha \xi^i_{n+2}, \qquad (19)$$

где γ_α -некоторые функции, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$d\gamma_\alpha - \gamma_\beta \vartheta^\beta_\alpha = \gamma_{\alpha i}\theta^i. \qquad (20)$$

При этом вектор $\vec{\mathcal{D}}$ коллинеарен вектору $\vec{\xi}_{n+2}$, т.е. $\mathcal{D}^i = \sigma\xi^i_{n+2}$, где $\sigma = \gamma^\alpha\gamma_\alpha + 1$ -поле отличного от нуля абсолютного инварианта на M_m. При выполнении условий (19) в силу теоремы на M_m индуцируется $(f\xi\eta\rho)$ -структура коранга 1 со структурными объектами $f^i_j, \mathcal{D}^i=\sigma\xi^i_{n+2}, \eta^{n+2}_i, \varkappa$. В случае обращения в нуль инварианта $\varkappa$ эта $(f\xi\eta\rho)$ -структура вырождается в почти контактную структуру. В работе [2] исследовался вопрос о почти контактном погружении и были найдены достаточные условия (см.[2],(11)), при выполнении которых на M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ индуцируется почти контактная структура со структурными объектами f^i_j, $\bar{\xi}^i_{n+2} = \rho\xi^i_{n+2}$, $\bar{\eta}^{n+2}_i = q\,\eta^{n+2}_i$ (ρ, q - абсолютные инварианты). При этом оказывается, что объекты $\{\gamma^\alpha\}$ и $\{\gamma_\alpha\}$ должны быть охваченными объектами и их компоненты должны соответственно определяться равенствами $\gamma^\alpha = \frac{1}{\varkappa_1}\rho^\alpha_\gamma\rho^\gamma_{n+2}$, $\gamma_\alpha = \frac{1}{\varkappa_1}\rho^\gamma_\alpha\rho^{n+2}_\gamma$, где $\varkappa_1 = 1+\rho^\alpha_{n+2}\rho^{n+2}_\alpha$. Равенство нулю абсолютного инварианта $\varkappa$ равносильно обращению в нуль инварианта $\rho^\beta_\alpha\rho^{n+2}_\beta\rho^\alpha_{n+2}$ (см.[2]).

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии//Тр.геом.семинара/ ВИНИТИ АН СССР.М.,1966.Т.1.С.139-190.

2. О п о л ь с к а я Е.В. О почти контактном погружении в многообразие почти контактной структуры//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр. ун-т.Калининград,1982.Вып.13.С.76-80.

3. О с т и а н у Н.М., П о л я к о в Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях,наделенных дифференциально-геометрическими структурами// Проблемы геометрии/ВИНИТИ АН СССР.М.,1980.Т.11.С.3-64.

УДК 514.75

ТРЕХСОСТАВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И.П о п о в

(Калининградский университет)

Работа посвящена построению общей теории регулярных трехсоставных распределений [13],[14], которые мы назвали $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределениями. $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределение - это тройка распределений проективного пространства P_n, состоящая из базисного распределения r-мерных плоскостей Λ (Λ-распределение), m-мерных плоскостей M (M-распределение), гиперплоскостей H (H-распределение) с соотношением инцидентности $\Lambda\subset M\subset H$ их соответствующих элементов в каждом центре X. Рассматриваются фокальные многообразия и инвариантные подпространства $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения. Изучаются проективные связности, индуцированные построенными инвариантными подпространствами данного распределения. Исследование проводится методом Г.Ф.Лаптева [3],[16]. При внешнем дифференцировании применяется оператор ∇, введенный в работе [4]. Схема использования индексов такова: $\bar{\mathcal{J}},\bar{\mathcal{K}},\bar{\mathcal{L}},\ldots = \overline{0,n}$; $\mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L},\ldots = \overline{1,n}$; $p,q,r,s,t = \overline{1,r}$; $\bar{p},\bar{q},\bar{r},\bar{s},\bar{t} = \overline{0,r}$; $i,j,k,\ldots = \overline{r+1,m}$; $\alpha,\beta,\gamma,\ldots = \overline{m+1,n-1}$; $\bar{\rho},\bar{\sigma},\bar{\tau} = \overline{0,n-1}$; $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d} = \overline{0,m}$; $a,b,c,d = \overline{1,m}$; $u,v,w = \overline{r+1,n-1}$; $\hat{i},\hat{j},\hat{k} = \{\overline{r+1,m};n\}$; $\rho,\sigma,\tau = \overline{1,n-1}$; $\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d} = \{\overline{1,m};n\}$; $\hat{u},\hat{v},\hat{w} = \overline{r+1,n}$; $\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma} = \overline{m+1,n}$.

§1. Задание трехсоставного распределения проективного пространства

1. Дифференциальные уравнения трехсоставного распределения в репере $\mathcal{R}^0$.

Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному реперу $\mathcal{R} = \{A_{\bar{\mathcal{J}}}\}$, дифференциальные уравнения которого имеют вид:

$$dA_{\bar{\jmath}} = \omega_{\bar{\jmath}}^{\bar{\varkappa}} A_{\bar{\varkappa}}, \tag{1.1}$$

где

$$\mathcal{D}\omega_{\bar{\jmath}}^{\bar{\varkappa}} = \omega_{\bar{\jmath}}^{\bar{L}} \wedge \omega_{\bar{L}}^{\bar{\varkappa}}, \quad \sum_{\bar{\jmath}} \omega_{\bar{\jmath}}^{\bar{\jmath}} = 0. \tag{1.2}$$

Совмещая вершину A_0 репера $\mathcal{R}'$ с текущей точкой X пространства P_n, мы приведем структурные формы точки X к каноническому виду $\omega_0^{\mathcal{J}}$. Такой репер нулевого порядка обозначим $\mathcal{R}^0$.

О п р е д е л е н и е. Тройку распределений

$$\Delta\Lambda_p^{\hat u} \overset{def}{=} \nabla\Lambda_p^{\hat u} - \Lambda_q^{\hat u}\Lambda_p^{\hat v}\omega_{\hat v}^q + \omega_p^{\hat u} = \Lambda_{p\varkappa}^{\hat u}\omega_0^{\varkappa}, \tag{1.3}$$

$$\Delta M_a^{\hat\alpha} \overset{def}{=} \nabla M_a^{\hat\alpha} - M_b^{\hat\alpha} M_a^{\hat\beta}\omega_{\hat\beta}^b + \omega_a^{\hat\alpha} = M_{a\varkappa}^{\hat\alpha}\omega_0^{\varkappa}, \tag{1.4}$$

$$\Delta H_\sigma^n \overset{def}{=} \nabla H_\sigma^n - H_\tau^n H_\sigma^n \omega_n^\tau + \omega_\sigma^n = H_{\sigma\varkappa}^n \omega_0^{\varkappa} \tag{1.5}$$

соответственно r-мерных плоскостей Λ (Λ-распределение), m-мерных плоскостей M (M-распределение), гиперплоскостей H (H-распределение) проективного пространства P_n с соотношением инцидентности

$$X \equiv A_0 \in \Lambda \subset M \subset H \quad (r < m < n-1) \tag{1.6}$$

их соответствующих элементов в каждом центре A_0 назовем трехсоставным распределением, или $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением [12], [13] проективного пространства P_n, в котором Λ-распределение назовем базисным распределением, а M-распределение и H-распределение – оснащающими распределениями.

Отметим, что плоскости $\Lambda(A_0)$, $M(A_0)$, $H(A_0)$ натянуты соответственно на точки

$$A_0, L_p = A_p + \Lambda_p^{\hat u} A_{\hat u}; \; A_0, M_a = A_a + M_a^{\hat\alpha} A_{\hat\alpha}; \; A_0, T_\sigma = A_\sigma + H_\sigma^n A_n. \tag{1.7}$$

Относительно репера $\mathcal{R}^0$ дифференциальные уравнения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения пространства P_n имеют вид [13]:

$$\begin{cases} d\Lambda_p^{\hat u} + \Lambda_p^{\hat v}\omega_{\hat v}^{\hat u} - \Lambda_q^{\hat u}\theta_p^q + \omega_p^{\hat u} = \Lambda_{p\varkappa}^{\hat u}\omega_0^{\varkappa}, \\ dM_i^{\hat\alpha} + M_i^{\hat\beta}\omega_{\hat\beta}^{\hat\alpha} - M_a^{\hat\alpha}(\omega_i^a + M_i^{\hat\beta}\omega_{\hat\beta}^a) + \omega_i^{\hat\alpha} = M_{i\varkappa}^{\hat\alpha}\omega_0^{\varkappa}, \\ dH_\alpha^n - H_\sigma^n(\omega_\alpha^\sigma + H_\alpha^n\omega_n^\sigma) + H_\alpha^n\omega_n^n + \omega_\alpha^n = H_{\alpha\varkappa}^n\omega_0^{\varkappa}, \end{cases} \tag{1.8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} H_p^n &= M_p^n - M_p^\alpha H_\alpha^n = \Lambda_p^n - \Lambda_p^u H_u^n, \\ H_i^n &= M_i^n - M_i^\alpha H_\alpha^n, \quad M_p^{\hat\alpha} = \Lambda_p^{\hat\alpha} - \Lambda_p^i M_i^{\hat\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Соотношения (1.9) характеризуют условия (1.6) инцидентности образующих элементов распределений (1.3)-(1.5). Геометрический объект $\Gamma_1 \equiv \{\Lambda_p^{\hat u}, M_i^{\hat\alpha}, H_\alpha^n, \Lambda_{p\varkappa}^{\hat u}, M_{i\varkappa}^{\hat\alpha}, H_{\alpha\varkappa}^n\}$ является фундаментальным объектом первого порядка $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения, компоненты $\Lambda_{p\varkappa}^{\hat u}$, $M_{i\varkappa}^{\alpha}$, $H_{\alpha\varkappa}^n$ которого удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\begin{aligned} d\Lambda_{p\varkappa}^{\hat u} - \Lambda_{q\varkappa}^{\hat u}\theta_p^q - \Lambda_{pL}^{\hat u}\omega_\varkappa^L + \Lambda_{p\varkappa}^{\hat u}\omega_0^0 + \Lambda_{p\varkappa}^{\hat v}\omega_{\hat v}^{\hat u} - \Lambda_{p\varkappa}^{\hat v}\Lambda_q^{\hat u}\omega_{\hat v}^q + \\ + (\Lambda_q^{\hat u}\delta_\varkappa^q - \delta_\varkappa^{\hat u})\theta_p^0 = \Lambda_{p\varkappa L}^{\hat u}\omega_0^L, \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} dM_{i\varkappa}^{\hat\alpha} - M_{a\varkappa}^{\hat\alpha}(\omega_i^a + M_i^{\hat\beta}\omega_{\hat\beta}^a) + M_{i\varkappa}^{\hat\beta}(\omega_{\hat\beta}^{\hat\alpha} - M_c^{\hat\alpha}\omega_{\hat\beta}^c) - M_{iL}^{\hat\alpha}\omega_\varkappa^L + \\ + M_{i\varkappa}^{\hat\alpha}\omega_0^0 + (M_b^{\hat\alpha}\delta_\varkappa^b - \delta_\varkappa^{\hat\alpha})(\omega_i^0 + M_i^{\hat\beta}\omega_{\hat\beta}^0) = M_{i\varkappa L}^{\hat\alpha}\omega_0^L, \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\left.\begin{aligned} dH_{\alpha\varkappa}^n + H_{\alpha\varkappa}^n\omega_0^0 - H_{\alpha L}^n\omega_\varkappa^L - H_{b\varkappa}^n(\omega_\alpha^b + H_\alpha^n\omega_n^b) - H_{\beta\varkappa}^n(\omega_\alpha^\beta + H_\alpha^n\omega_n^\beta) + \\ + (H_\tau^n\delta_\varkappa^\tau - \delta_\varkappa^n)(\omega_\alpha^0 + H_\alpha^n\omega_n^0) + H_{\alpha\varkappa}^n(\omega_n^n - H_\tau^n\omega_n^\tau) = H_{\alpha\varkappa L}^n\omega_0^L, \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

где

$$\begin{cases} H_{i\varkappa}^n = M_{i\varkappa}^n - M_i^\alpha H_{\alpha\varkappa}^n - H_\alpha^n M_{i\varkappa}^\alpha, \\ H_{p\varkappa}^n = M_{p\varkappa}^n - M_p^\alpha H_{\alpha\varkappa}^n - H_\alpha^n M_{p\varkappa}^\alpha = \Lambda_{p\varkappa}^n - \Lambda_p^u H_{u\varkappa}^n - H_u^n \Lambda_{p\varkappa}^u, \\ M_{p\varkappa}^{\hat\alpha} = \Lambda_{p\varkappa}^{\hat\alpha} - \Lambda_p^i M_{i\varkappa}^{\hat\alpha} - M_i^{\hat\alpha}\Lambda_{p\varkappa}^i, \end{cases} \tag{1.13}$$

$$\theta_p^q \overset{def}{=} \omega_p^q + \Lambda_p^{\hat u}\omega_{\hat u}^q; \quad \theta_p^0 \overset{def}{=} \omega_p^0 + \Lambda_p^{\hat u}\omega_{\hat u}^0; \quad \theta_{\hat u}^{\hat v} \overset{def}{=} \omega_{\hat u}^{\hat v} - \Lambda_p^{\hat v}\omega_{\hat u}^p. \tag{1.14}$$

Подобъекты $\{\Lambda_p^{\hat u}, M_i^{\hat\alpha}, \Lambda_{p\varkappa}^{\hat u}, M_{i\varkappa}^{\hat\alpha}\}$, $\{\Lambda_p^{\hat u}, \Lambda_{p\varkappa}^{\hat u}\}$ объекта Γ_1 являются соответственно фундаментальными объектами первого порядка $M(\Lambda)$-распределения (или двухсоставного распределения $\mathcal{H}_m^r$ [17]) и Λ-распределения относительно репера $\mathcal{R}^0$. Кроме того, используя компоненты объекта Γ_1 и соотношения (1.9), (1.13), легко находим фундаментальные объекты первого порядка M-распределения, H-распределения, $\mathcal{H}(\Lambda)$-распределения (гиперполосного распределения $\mathcal{H}_r$ [16]), $\mathcal{H}(M)$-распределения (гиперполосного распределения $\mathcal{H}_m$ [16]) в репере $\mathcal{R}^0$. Продолжая систему (1.8) и возникающие при этом последовательно системы дифференциальных уравнений, мы получим дифференциальные уравнения полей фундаментальных объектов последующих порядков $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения. В силу описанного выше строения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения в геометрии этого многообразия имеются аналоги с некоторыми фактами из геометрии H-распределения, M-распределения, гиперполосного распределения $\mathcal{H}(\Lambda)$ (или $\mathcal{H}(M)$). Однако эти аналоги не относятся к геометрии только H-распределения, M-распределения, $\mathcal{H}(\Lambda)$-распределения, $\mathcal{H}(M)$-распределения, взятых в отдельности. Так как фундаментальный объект порядка ν $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения содержит в качестве подобъектов фундаментальные объекты порядка ν Λ-распределения и $M(\Lambda)$-распределения, то вся геометрия, которая строится для неоснащенного Λ-распределения или $M(\Lambda)$-распределения, реализуется на $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределении. Однако, используя поля соответствующих оснащающих объектов (для Λ-распределения, например, это поля геометрических объектов $\{M^{\hat{\alpha}}_a\}$ и $\{H^n_\sigma\}$, а для $M(\Lambda)$-распределения оснащающим полем служит поле геометрического объекта $\{H^n_\sigma\}$), мы имеем возможность построить объекты, аналогичные тем, которые строятся для неоснащенных Λ-распределений и $M(\Lambda)$-распределений, но существенно отличные от них. Изучение этих полей геометрических объектов Λ-распределения и $M(\Lambda)$-распределения, т.е. построенных с существенным использованием полей оснащающих их геометрических объектов, и является одним из возможных путей изучения геометрии $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения. С другой стороны, геометрию $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения можно рассматривать как геометрию оснащенных соответствующим образом $\mathcal{H}(\Lambda)$-распределения ($\mathcal{H}(M)$-распределения) или M-распределения.

Имеет место теорема существования [13]:

Т е о р е м а 1. $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения существуют с произволом в $(n-m+\tau)(m-\tau)+(\tau+1)(n-m)-1$ функций n аргументов.

2. Репер $\mathcal{R}_1(H,M)$.

В работе [2, §3] систематизированы все основные специализированные реперы, применяемые нами при различных исследованиях $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределений. Преимущество специализированных реперов по сравнению с обычными каноническими реперами состоит в том, что они позволяют сохранять для относительных компонент структурных объектов значения, отличные от нулевых. В данной статье используется репер $\mathcal{R}_1(H,M)$: $\{L_0=A_0;\ L_p=A_p+\Lambda^i_p A_i;\ L_{\hat{u}}=A_{\hat{u}}\}$, где $\{A_a\}\subset M$. В этом репере

$$H^n_\sigma=0,\quad M^{\hat{\alpha}}_a=0,\quad \Lambda^{\hat{\alpha}}_p=0. \qquad (1.15)$$

Условия инцидентности (1.9) плоскостей Λ, M, H в силу (1.15)

тождественно выполняются, а уравнения (1.8) $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения в репере $\mathcal{R}_1(H,M)$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\omega^n_\sigma=H^n_{\sigma K}\omega^K_0,\quad \omega^\alpha_a=M^\alpha_{aK}\omega^K_0,\\ &d\Lambda^i_p+\Lambda^j_p\theta^i_j-\Lambda^i_q\theta^q_p+\Lambda^j_p\Lambda^i_q\theta^q_j+\omega^i_p=\Lambda^i_{pK}\omega^K_0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.16)$$

Формы $\theta^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathcal{J}}}$, определяющие инфинитезимальные перемещения репера $\mathcal{R}_1(H,M)$, имеют строение

$$\begin{aligned} &\theta^0_0=\omega^0_0,\ \theta^p_0=\omega^p_0,\ \theta^\alpha_0=\omega^\alpha_0,\ \theta^i_0=\omega^i_0-\Lambda^i_p\omega^p_0,\ \theta^n_0=\omega^n_0,\\ &\theta^{\bar{q}}_p=\omega^{\bar{q}}_p+\Lambda^i_p\omega^{\bar{q}}_i,\ \theta^{\hat{u}}_p=\Lambda^{\hat{u}}_{pK}\omega^K_0,\ \theta^{\bar{p}}_i=\omega^{\bar{p}}_i,\ \theta^j_i=\omega^j_i-\Lambda^j_t\omega^t_i,\\ &\theta^\alpha_i=M^\alpha_{iK}\omega^K_0,\ \theta^n_i=H^n_{iK}\omega^K_0,\ \theta^{\bar{p}}_\alpha=\omega^{\bar{p}}_\alpha,\ \theta^j_\alpha=\omega^j_\alpha-\Lambda^j_p\omega^p_\alpha,\\ &\theta^\beta_\alpha=\omega^\beta_\alpha,\ \theta^n_\alpha=H^n_{\alpha K}\omega^K_0,\ \theta^{\bar{p}}_n=\omega^{\bar{p}}_n,\ \theta^{\bar{\alpha}}_n=\omega^{\bar{\alpha}}_n,\ \theta^i_n=\omega^i_n-\Lambda^i_t\omega^t_n \end{aligned} \qquad (1.17)$$

и удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}\theta^0_{\bar{\mathcal{J}}}=\theta^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathcal{J}}}\wedge\theta^0_{\bar{\mathcal{K}}},\quad \mathcal{D}\theta^{\mathcal{J}}_0=\theta^{\bar{\mathcal{K}}}_0\wedge\theta^{\mathcal{J}}_{\bar{\mathcal{K}}},\quad \mathcal{D}\theta^q_p=\theta^{\bar{\mathcal{K}}}_p\wedge\theta^q_{\bar{\mathcal{K}}},\\ &\mathcal{D}\theta^{\hat{u}}_p=\theta^{\bar{\mathcal{K}}}_p\wedge\theta^{\hat{u}}_{\bar{\mathcal{K}}}+\Lambda^{\hat{u}}_{pKL}\omega^L_0\wedge\omega^K_0,\quad \mathcal{D}\theta^{\mathcal{J}}_n=\theta^{\bar{\mathcal{K}}}_n\wedge\theta^{\mathcal{J}}_{\bar{\mathcal{K}}},\\ &\mathcal{D}\theta^a_i=\theta^{\bar{\mathcal{K}}}_i\wedge\theta^a_{\bar{\mathcal{K}}},\quad \mathcal{D}\theta^{\hat{\alpha}}_i=\theta^{\bar{\mathcal{K}}}_i\wedge\theta^{\hat{\alpha}}_{\bar{\mathcal{K}}}+M^{\hat{\alpha}}_{iKL}\omega^L_0\wedge\omega^K_0,\\ &\mathcal{D}\theta^\sigma_\alpha=\theta^{\bar{\mathcal{K}}}_\alpha\wedge\theta^\sigma_{\bar{\mathcal{K}}},\quad \mathcal{D}\theta^n_\alpha=\theta^{\bar{\mathcal{K}}}_\alpha\wedge\theta^n_{\bar{\mathcal{K}}}+H^n_{\alpha KL}\omega^L_0\wedge\omega^K_0. \end{aligned} \qquad (1.18)$$

Относительно репера $\mathcal{R}_1(H,M)$ компоненты B^i_{pq}, B^α_{pq}, $B^u_{pq}=\Lambda^u_{pq}+\Lambda^u_{pj}\Lambda^j_q$; $B^n_{pq}=\Lambda^n_{pq}+\Lambda^n_{pj}\Lambda^j_q$ главного фундаментального тензора $\{B^{\hat{\alpha}}_{pq}\}$ первого порядка Λ-распределения удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\overset{(\theta)}{\nabla} B^i_{pq}+B^n_{pq}\theta^i_n+B^\alpha_{pq}\theta^i_\alpha=B^i_{pqK}\omega^K_0,\\ &\overset{(\theta)}{\nabla} B^\alpha_{pq}+B^n_{pq}\theta^\alpha_n=B^\alpha_{pqK}\omega^K_0,\\ &\overset{(\theta)}{\nabla} B^u_{pq}+B^n_{pq}\theta^u_n=B^u_{pqK}\omega^K_0,\\ &\overset{(\theta)}{\nabla} B^n_{pq}=B^n_{pqK}\omega^K_0. \end{aligned} \qquad (1.19)$$

Как следует из уравнений (1.19), система величин $\{B^n_{pq}\}$ в репере $\mathcal{R}_1(H,M)$ образует тензор первого порядка, присоединенный к прямому произведению групп с инвариантными формами $\bar{\theta}^p_q, \bar{\theta}^n_n, \bar{\theta}^0_0$.

О п р е д е л е н и е. $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределение назовем регулярным [13], если тензор $\{B^n_{pq}\}$ невырожденный, т.е. когда

$$B = \det \| B^n_{pq} \| \neq 0, \tag{1.20}$$

где B – относительный инвариант, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$d\ln B = 2\theta^p_p - \tau(\theta^n_n + \theta^0_0) + B_x\,\omega^x_0 . \tag{1.21}$$

В дальнейшем будем считать, что условие (1.20) выполняется, т.е. будем рассматривать регулярные $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения. Условие (1.20) позволяет ввести обращенный тензор B^{pq}_n, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dB^{pq}_n + B^{sq}_n\theta^p_s + B^{ps}_n\theta^q_s - B^{pq}_n(\theta^n_n + \theta^0_0) = B^{pq}_{nx}\,\omega^x_0 \tag{1.22}$$

и конечным соотношениям

$$B^n_{pq}B^{qs}_n = \delta^s_p , \quad B^n_{pt}B^{sp}_n = \delta^s_t . \tag{1.23}$$

§2. Фокальные многоооразия, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением

1. Характеристика χ. Ассоциированное инвариантное L-распределение.

О п р е д е л е н и е. Фокальной точкой текущего элемента $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения с центром в точке $L_0 \equiv A_0$, соответствующей определенному направлению смещения центра L_0, называется [4] точка F этого элемента, которая принадлежит также (с точностью до величин первого порядка малости) соседнему элементу этого распределения, полученному смещением центра L_0 в данном направлении (фокальное направление, соответствующее данной точке F).

Среди фокальных многообразий, ассоциированных с Λ-распределением, выделим прежде всего характеристику гиперплоскости $H(L_0)$ при смещении центра L_0 по кривым, принадлежащим Λ-распределению:

$$\theta^n_0 = 0,\ \theta^u_0 = 0,\ \theta^p_0 = \mu^p\theta, \tag{2.1}$$

где

$$\mathcal{D}\theta = \theta\wedge\theta_1,\ \ d\mu^p + \mu^q\theta^p_q - \mu^p(\theta^0_0 + \theta_1) = \mu^p_1\theta . \tag{2.2}$$

Характеристика гиперплоскости $H(L_0)$ при смещениях центра вдоль кривых (2.1) определяется системой уравнений:

$$y^p = \chi^p_u y^u,\ \ y^n = 0, \tag{2.3}$$

где

$$\chi^p_u \overset{\mathrm{def}}{=} -B^n_{uq}B^{qp}_n ,\quad \overset{(\theta)}{\nabla}\chi^p_u + \theta^p_u = \chi^p_{ux}\,\omega^x_0 . \tag{2.4}$$

Для регулярного $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения ранг системы (2.3) равен $\tau+1$, и, следовательно, эта система уравнений определяет $(n-\tau-1)$-мерную плоскость $\chi(L_0)$, которую назовем χ-плоскостью. Плоскость размерности $\ell = m-\tau$ $L(L_0) = \chi(L_0)\cap M(L_0)$, определяемую уравнениями

$$y^p = \chi^p_i y^i,\ \ y^\alpha = 0, \tag{2.5}$$

где

$$\overset{(\theta)}{\nabla}\chi^p_i + \theta^p_i = \chi^p_{ix}\,\omega^x_0 ,\quad \chi^p_i = -B^n_{it}B^{tp}_n , \tag{2.6}$$

назовем L-плоскостью (или плоскостью L). Следуя работе [11], введем такое

О п р е д е л е н и е. Геометрические образы, принадлежащие текущей плоскости $H(L_0)$, которые ассоциируются с Λ-распределением, M-распределением или L-распределением, будем называть соответственно $H\Lambda$-виртуальными, HM-виртуальными, HL-виртуальными геометрическими образами.

Аналогично, $M\Lambda$-виртуальными (ML-виртуальными) образами назовем геометрические образы, принадлежащие текущей M-плоскости, которые ассоциируются с Λ-распределением (L-распределением).

Значит, поле квазитензора $\{\chi^p_u\}$ (2.4) определяет поле $H\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода (поле χ-плоскостей), а поле квазитензора $\{\chi^p_i\}$ (2.6) задает поле $M\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода (поле L-плоскостей).

2. Ассоциированные инвариантные Φ-распределение и Ψ-распределение.

Аналогично находим характеристику гиперплоскости $H(L_0)$ при смещении центра L_0 по кривым, принадлежащим M-распределению [13]:

$$y^c = \varphi^c_\alpha y^\alpha,\ \ y^n = 0, \tag{2.7}$$

где

$$\varphi^c_\alpha = -F^n_{\alpha\ell}F^{\ell c}_n,\quad \overset{(\Phi)}{\nabla}\varphi^c_\alpha + \theta^c_\alpha = \varphi^c_{\alpha x}\,\omega^x_0 . \tag{2.8}$$

Квазитензор $\{\varphi^c_\alpha\}$ 1-го порядка определяет в общем случае в каждой текущей гиперплоскости $H(L_0)$ ($n-m-1$)-мерную плоскость $\Phi_{n-m-1}(L_0)$, проходящую через центр L_0 элемента $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-

распределения. Эту плоскость $\Phi_{n-m-1}(L_0)$ будем называть Φ-плоскостью (или плоскостью Φ). Итак, с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением ассоциируется инвариантное распределение Φ-плоскостей – Φ-распределение. Наконец, введем в рассмотрение еще одно распределение плоскостей, ассоциированное инвариантным образом с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением. В каждом центре L_0 определим плоскость $\Psi(L_0)=[\Lambda(L_0),\Phi(L_0)]$, натянутую на плоскости $\Lambda(L_0)$, $\Phi(L_0)$, которую назовем Ψ-плоскостью (или плоскостью Ψ). Плоскость $\Psi(L_0)$ в общем случае имеет размерность $n-\ell-1$. Таким образом, получаем следующие соотношения инцидентности между элементами рассматриваемых распределений в каждом центре L_0 $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения:

$$\Lambda\cup L=M,\quad \Lambda\cup\Phi=\Psi,\quad L\cup\Phi=\chi,$$
$$M\cap\Psi=\Lambda,\quad M\cap \chi=L,\quad \chi\cap\Psi=\Phi. \qquad (2.9)$$

§3. Инвариантные подпространства, ассоциированные с фокальными образами $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения

1. $H\Lambda$-виртуальная плоскость Кенигса пары распределений (Λ,χ).

Следуя работе [8], рассмотрим инвариантное подпространство, ассоциированное с фокальным многообразием $F_{n-r-2}(\chi,\Lambda)$ [13]. Линейная поляра центра L_0 относительно фокального многообразия $F_{n-r-2}(\chi,\Lambda)$, ассоциированного с одномерной нормалью ν H-распределения, определяется относительно репера $\mathcal{R}_1(H,M)$ системой уравнений

$$y^0=k_u y^u,\quad y^p=\chi^p_u y^u,\quad y^n=0, \qquad (3.1)$$

где

$$k_u=-\frac{1}{r}(\hat{\chi}^p_{up}-B^v_{sp}\chi^s_u\chi^p_v),\quad \overset{(0)}{\nabla}k_u+\chi^t_u\theta^0_t+\theta^0_u=k_{uK}\omega^K_0. \qquad (3.2)$$

Геометрический объект $\{\chi^p_u, k_u\}$ -квазитензор 2-го порядка определяет в χ-плоскости $(n-r-2)$-мерную плоскость $k(L_0)$ (3.1), не проходящую через центр L_0, которая является аналогом плоскости Кенигса [4] для пары распределений (Λ,χ). Другими словами, поле объекта $\{\chi^p_u, k_u\}$ определяет поле $H\Lambda$-виртуальных оснащающих по Картану плоскостей (k-плоскостей) Λ-распределения.

2. Плоскость $\mathfrak{p}$ Нордена-Тимофеева.

Известно [13], что поле квазитензора $\{f_p\}$, где

$$f_p\overset{def}{=}-\frac{1}{n-m-1}[\Lambda^u_{pu}+B^u_{pt}\chi^t_u-(\Lambda^n_{pu}+B^n_{pt}\chi^t_u)\nu^u_n], \qquad (3.3)$$

определяет поле нормалей 2-го рода Λ-распределения, соответствующих в обобщенном проективитете Бомпьяни-Пантази $H\Lambda$-виртуальным нормалям 1-го рода. Отметим, что порядок квазитензора $\{f_p\}$ равен порядку квазитензора $\{\nu^u_n\}$. Плоскости k и f в текущем элементе $H(L_0)$ распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ определяют $(n-2)$-мерную плоскость $\mathfrak{p}=[k,f]$, не проходящую через центр L_0. Плоскость $\mathfrak{p}(L_0)$ в репере $\mathcal{R}_1(H,M)$ задается системой уравнений

$$y^0=\mathfrak{p}_\sigma y^\sigma,\quad y^n=0, \qquad (3.4)$$

где

$$\mathfrak{p}_p=f_p,\quad \mathfrak{p}_u=k_u-f_p\chi^p_u,\quad \overset{(0)}{\nabla}\mathfrak{p}_\sigma+\theta^0_\sigma=\mathfrak{p}_{\sigma K}\omega^K_0. \qquad (3.5)$$

Согласно работе [2], плоскость $\mathfrak{p}(L_0)$, ассоциированную с одномерной нормалью $\nu(L_0)$, назовем HL-виртуальной плоскостью Нордена-Тимофеева [7].

3. HM-виртуальная плоскость Кенигса φ пары распределений (M,Φ).

Найдем линейную поляру центра L_0 относительно фокального многообразия $k_{n-m-2}(\Phi,M)$ [13]:

$$y^0=\varphi_\alpha y^\alpha;\quad y^a=\varphi^a_\alpha y^\alpha,\quad y^n=0, \qquad (3.6)$$

где

$$\varphi_\alpha=-\frac{1}{m}(\hat{\varphi}^b_{\alpha b}-F^p_{cb}\varphi^c_\alpha\varphi^b_p),\quad \overset{(0)}{\nabla}\varphi_\alpha+\varphi^b_\alpha\theta^0_b+\theta^0_\alpha=\varphi_{\alpha K}\omega^K_0. \qquad (3.7)$$

Геометрический объект $\{\varphi_\alpha,\varphi^a_\alpha\}$ определяет в каждой плоскости $\Phi(L_0)$ $(n-m-2)$-мерную плоскость φ, не проходящую через центр L_0, которая является аналогом плоскости Кенигса [4] пары распределений (M,Φ). Другими словами, геометрический объект $\{\varphi_\alpha,\varphi^a_\alpha\}$ определяет HM-виртуальную плоскость Кенигса φ пары распределений (M,Φ), ассоциированную с одномерной нормалью ν.

4. Плоскость $\mathfrak{q}$ Нордена-Тимофеева.

Построим еще одно поле плоскостей Нордена-Тимофеева, отличное от найденного нами поля плоскостей $\mathfrak{p}$ (п.2). Линейная поляра центра L_0 относительно фокального многообразия $\mathfrak{Y}_{m-1}(M,\Phi)$ [13] задается системой уравнений

$$y^n=0,\quad y^\alpha=0,\quad y^0-h_a y^a=0, \qquad (3.8)$$

где величины

$$h_a=-\frac{1}{(n-m-1)}[\tilde{F}^\alpha_{a\alpha}-\nu^\alpha_n\tilde{F}^n_{a\alpha}+(F^\alpha_{aq}-\nu^\alpha_nF^n_{aq})\varphi^q_\alpha] \qquad (3.9)$$

удовлетворяют уравнениям

$$\overset{(0)}{\nabla}h_a+\theta^0_a=h_{aK}\omega^K_0. \qquad (3.10)$$

Значит, квазитензор $\{h_a\}$ определяет в каждой M-плоскости $(m-1)$-мерную плоскость, не проходящую через центр L_0 — нормаль 2-го рода M-плоскости. Назовем эту плоскость h-плоскостью (или плоскостью h). Таким образом, поле геометрического объекта $\{h_a\}$ определяет поле нормалей 2-го рода M-распределения – поле h-плоскостей, соответствующих в обобщенном проективитете Бомпьяни-Пантази [4] HM-виртуальным нормалям 1-го рода M-распределения. Заметим, что порядок квазитензора $\{h_a\}$ равен порядку квазитензора $\{\nu^\alpha_n\}$.

В текущей H - плоскости распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ плоскости φ (3.6) и h (3.8) натягивают ($n-2$)-мерную плоскость $q=[\varphi, h]$, не проходящую через центр L_0, которая определяется системой уравнений

$$y^0 = q_\sigma y^\sigma, \quad y^n = 0, \tag{3.11}$$

где

$$q_a = h_a, \quad q_\alpha = \varphi_\alpha - h_a \varphi^a_\alpha; \quad \overset{(\theta)}{\nabla} q_\sigma + \theta^0_\sigma = q_{\sigma K}\,\omega^K_0. \tag{3.12}$$

Плоскость $q(L_0)$, ассоциированную с одномерной нормалью $\nu(L_0)$, назовем HM-виртуальной плоскостью Нордена-Тимофеева [7].

В общем случае объекты $\{p_\sigma\}$ и $\{q_\sigma\}$ не совпадают, что позволяет в текущем элементе H-распределения ввести в рассмотрение однопараметрический пучок плоскостей Нордена-Тимофеева:

$$\varkappa_\sigma(\varepsilon) = q_\sigma + \varepsilon\,(q_\sigma - p_\sigma), \tag{3.13}$$

где ε – абсолютный инвариант.

Т е о р е м а 2. Поля объектов $\{q_\sigma\}$ и $\{p_\sigma\}$ определяют в дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$ поле однопараметрического пучка (p, q) ($n-2$)-мерных нормалей 2-го рода H-плоскости – поле однопараметрического пучка $\varkappa(\varepsilon)$ плоскостей Нордена-Тимофеева, инвариантным образом связанное с данным $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением.

§4. Нормализация базисного Λ-распределения и оснащающего M-распределения по А.П.Нордену

I. Поле квазитензора $\{g_t\}$ [14] в дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$ определяет поле нормалей второго рода Λ-распределения. Поле нормалей 1-го рода Λ-распределения можно построить, используя квазинормаль $\{t^p_{\hat u}\}$, введенную в работе [5]:

$$t^p_{\hat u} = \Lambda^{\hat v}_{q\hat u}\, b^{qt}_{\hat v}\, \overset{*}{B}{}^p_t, \tag{4.1}$$

где $\{\overset{*}{B}{}^p_t\}$ – тензор, обратный к невырожденному тензору

$$B^p_t \overset{def}{=} b^{pq}_{\hat u} B^{\hat u}_{qt}. \tag{4.2}$$

Действительно, поле объекта

$$G^p_{\hat u} \overset{def}{=} -(g_s \overset{*}{B}{}^p_q b^{sq}_{\hat u} + t^p_{\hat u}) \tag{4.3}$$

определено дифференциальными уравнениями

$$\overset{(\theta)}{\nabla} G^t_{\hat u} + \theta^t_{\hat u} = G^t_{\hat u K}\,\omega^K_0. \tag{4.4}$$

Отсюда следует, что квазитензор $\{G^t_{\hat u}\}$ порядка $t \geq 2$ задает поле нормалей 1-го рода Λ-распределения. Таким образом, поле нормалей $\{G^t_{\hat u}\}$ 1-го рода и поле нормалей $\{g_t\}$ 2-го рода Λ-распределения, находящихся во взаимно однозначном соответствии (4.3), устанавливаемом квазинормалью $\{t^p_{\hat u}\}$ (4.1), образуют нормализацию Λ-распределения в смысле А.П.Нордена [6] в дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$.

З а м е ч а н и е. Построения Г.Ф.Лаптева и Н.М.Остиану [4], [8] полей нормалей I-го и 2-го рода для распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности переносятся и на случай Λ-распределения составного многообразия $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ проективного пространства P_n. В силу этого для Λ-распределения можно построить поля нормалей $\{H^p_{\hat u}\}$ [4], $\{N^p_{\hat u}\}$ [8], внутренним инвариантным образом присоединенные во второй дифференциальной окрестности. Поле нормалей $\{G^t_{\hat u}\}$ (порядка $t=2$) не совпадает с полями нормалей $\{H^p_{\hat u}\}$ и $\{N^p_{\hat u}\}$, ибо при его построении существенно использовалось поле тензора g_{pq} [14].

В силу этого замечания, приходим к выводу:

Во второй дифференциальной окрестности к Λ-распределению внутренним инвариантным образом можно присоединить, по крайней мере, три различных однопараметрических семейства нормалей 1-го рода (G,H), (G,N), (H,N) и, следовательно, три различных однопараметрических семейства внутренних инвариантных нормалей 2-го рода, соответствующих семействам нормалей 1-го рода в обобщенном проективитете Бомпьяни-Пантази. Другими словами, во второй дифференциальной окрестности к Λ-распределению можно присоединить внутренним образом три различных однопараметрических семейства нормализаций в смысле А.П.Нордена [6].

2. Аналогичным образом введем нормализацию по А.П.Нордену оснащающего M-распределения.

Рассмотрим квазинормаль [14, §3]

$$m^c_\beta = F^{\hat{\alpha}}_{a\beta} f^{a\theta}_{\hat{\alpha}} \overset{*}{M}{}^c_\theta, \qquad (4.5)$$

ассоциированную с M-распределением. В формуле (4.5) величины $\overset{*}{M}{}^c_\theta$ образуют тензор, обратный к невырожденному тензору

$$M^c_a = f^{c\theta}_{\hat\alpha} F^{\hat\alpha}_{\theta a}, \quad \overset{(\theta)}{\nabla} M^c_a = M^c_{ax}\omega^x_0, \qquad (4.6)$$

а $f^{a\theta}_{\hat\alpha}$ -компоненты обращенного тензора для главного фундаментального тензора $\{f^{\hat\alpha}_{a\theta}\}$ 1-го порядка M-распределения. Используя квазинормаль (4.5) и квазитензор g_a [14; §3], построим объект

$$M^a_{\hat\alpha} \overset{def}{=} -(g_c f^{c\theta}_{\hat\alpha}\overset{*}{M}{}^a_\theta + m^a_{\hat\alpha}), \qquad (4.7)$$

удовлетворяющий дифференциальным уравнениям

$$\overset{(\theta)}{\nabla} M^a_{\hat\alpha} + \theta^a_{\hat\alpha} = M^a_{\hat\alpha x}\omega^x_0. \qquad (4.8)$$

Отсюда следует, что поле квазитензора $\{M^a_{\hat\alpha}\}$ порядка $t \geq 2$ определяет поле нормалей 1-го рода M-распределения. Учитывая замечание (п.1, §4), приходим к выводу:

1) Во второй дифференциальной окрестности к M-распределению можно присоединить три различных однопараметрических семейства нормализаций в смысле А.П.Нордена.

2) В дифференциальной окрестности порядка $t \geq 3$ к M-распределению можно присоединить внутренним инвариантным образом, по крайней мере, два различных однопараметрических семейства $(M^a_{\hat\alpha}, H^a_{\hat\alpha})$, $(M^a_{\hat\alpha}, N^a_{\hat\alpha})$ нормалей 1-го рода и, следовательно, два различных однопараметрических семейства нормализаций M-распределения в смысле А.П.Нордена.

§5. Инвариантные оснащения Λ-распределения и M-распределения в смысле Картана

1. Рассмотрим в каждом центре $(n-r)$-мерную инвариантную плоскость $\mathcal{L}(L_0)=[\Psi, X]$, натянутую на одномерную нормаль $\Psi(L_0)$ [15] и характеристику $X(L_0)$, которую относительно репера $\mathcal{R}_L(H,M)$ зададим системой уравнений [14]

$$y^p = \mathcal{L}^p_{\hat u} y^{\hat u};\quad \mathcal{L}^p_u = X^p_u,\ \mathcal{L}^p_n = \Psi^p_n - X^p_u \Psi^u_n. \qquad (5.1)$$

В плоскости $\mathcal{L}(L_0)$ найдем фокальное многообразие $\Psi_{n-r-1}(\Lambda)$ [14, §4] размерности $(n-r-1)$ порядка r, соответствующее плоскости Λ и ассоциированное с инвариантной нормалью $\Psi(L_0)$. Линейная поляра центра L_0 относительно фокального многообразия $\Psi_{n-r-1}(\Lambda)$ определяется уравнениями [14]

$$y^p = \mathcal{L}^p_{\hat u} y^{\hat u},\quad y^0 = \ell_u y^u + \ell_n y^n, \qquad (5.2)$$

где

$$\ell_u = k_u,\ \ell_n \overset{def}{=} -\frac{1}{r}(\hat{\mathcal{L}}^p_{np} - B^n_{sq}\mathcal{L}^s_n\mathcal{L}^q_n - B^v_{sq}\mathcal{L}^q_v\mathcal{L}^s_n), \qquad (5.3)$$

$$\overset{(\theta)}{\nabla}\ell_n = \ell_u\theta^u_n - \mathcal{L}^t_n\theta^0_t - \theta^0_n + \ell_{nx}\omega^x_0, \qquad (5.5)$$

$$\overset{(\theta)}{\nabla}\ell_{\hat u} = -\mathcal{L}^t_{\hat u}\theta^0_t - \theta^0_{\hat u} + \ell_{\hat u x}\omega^x_0. \qquad (5.6)$$

Следовательно, геометрический объект $\{\mathcal{L}^t_{\hat u}, \ell_{\hat u}\}$ определяет в каждой точке L_0 ($n-r-1$)-мерную оснащающую плоскость $\ell(L_0)$, внутренне присоединенную к Λ-распределению, - плоскость Кенигса в плоскости $\mathcal{L}(L_0)$, проходящую через плоскость k (3.1). С другой стороны [9], точка Кенигса $K = L_n + \Psi^{\sigma}_n L_\sigma + \Psi_n L_0$ нормали $\Psi(L_0)$ и $H\Lambda$-виртуальная плоскость $\overset{(\Psi)}{k}(L_0)$ (3.1), лежащая в плоскости $X(L_0)$, натягивает ($n-r-1$)-мерную плоскость $K(L_0)=[K, \underset{(\Psi)}{k}]$, не проходящую через центр. Плоскость $K(L_0)$:

$$y^p = \mathcal{L}^p_{\hat u}y^{\hat u},\quad y^0 = K_{\hat u}y^{\hat u},\ \text{где}\ K_u = k_u,\ K_n = \Psi_n - k_u\Psi^u_n \qquad (5.7)$$

является инвариантной оснащающей плоскостью в смысле Картана плоскости $\Lambda(L_0)$.

Таким образом, в каждой плоскости $\mathcal{L}(L_0)$ найдены две, несовпадающие между собой, оснащающие по Картану плоскости $\ell(L_0)$ и $K(L_0)$ для плоскости $\Lambda(L_0)$. В результате приходим к выводу:

Т е о р е м а 3. В третьей дифференциальной окрестности образующего элемента $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения внутренним инвариантным образом присоединяется к Λ-распределению пучок инвариантных оснащающих плоскостей в смысле Картана, осью которого является $H\Lambda$-виртуальная плоскость Кенигса $k(L_0) \subset X(L_0)$, а базисными плоскостями пучка - плоскости $\ell(L_0)$ (5.2) и $K(L_0)$ (5.7). Этому пучку принадлежит ($n-1$) инвариантных плоскостей, определяемых фокальными точками нормали $\Psi(L_0)$.

2. Проведем аналогичные построения инвариантных оснащений

M-распределения в смысле Картана. Рассмотрим поле ($n-m$)-мерных плоскостей $\mathscr{F}(L_0)=[\mathcal{G}, \Phi]$, каждая из которых (в центре L_0) натянута на одномерную инвариантную нормаль $\mathcal{G}(L_0)$ [15] и характеристику $\Phi(L_0)$ (2.7) гиперплоскости $H(L_0)$. Линейная поляра центра L_0 относительно фокального многообразия $\mathcal{G}_{n-m-1}(M)$ определяется системой уравнений

$$y^a=\mathscr{F}^a_{\hat\alpha}y^{\hat\alpha},\; y^0=\varphi_\alpha y^\alpha+\varphi_n y^n. \tag{5.7}$$

где

$$\varphi_\alpha=\varphi_\alpha;\quad \varphi_n \overset{def}{=} -\frac{1}{m}\left(\hat{\mathscr{F}}^b_{nb}-F^n_{cb}\mathscr{F}^c_n\mathscr{F}^b_n-F^\beta_{cb}\varphi^b_\beta\mathscr{F}^c_n\right), \tag{5.8}$$

$$\overset{(\theta)}{\nabla}\varphi_n=\varphi_\alpha\theta^\alpha_n-\mathscr{F}^c_n\theta^0_c-\theta^0_n+\varphi_{n\varkappa}\omega^\varkappa_0, \tag{5.9}$$

$$\overset{(\theta)}{\nabla}\varphi_\alpha=-\mathscr{F}^b_{\hat\alpha}\theta^0_b-\theta^0_\alpha+\varphi_{\alpha\varkappa}\omega^\varkappa_0. \tag{5.10}$$

Следовательно, геометрический объект $\{\mathscr{F}^b_{\hat\alpha}, \varphi_{\hat\alpha}\}$ задает в плоскости $\mathscr{F}(L_0)$ $(n-m-1)$-мерную оснащающую плоскость φ — плоскость Кенигса в плоскости $\mathscr{F}$, проходящую через плоскость $\varphi(L_0)$ (3.6). С другой стороны, точка Кенигса $\underset{(\mathcal{G})}{K}$ нормали $\mathcal{G}(L_0)$ и HM-виртуальная плоскость Кенигса $\varphi(L_0)\subset\Phi(L_0)$ натягивают $(n-m-1)$-мерную плоскость $\mathcal{E}(L_0)=[\underset{(\mathcal{G})}{K}, \varphi]$, не проходящую через центр. Плоскость $\mathcal{E}(L_0)$ является инвариантной оснащающей плоскостью в смысле Картана плоскости $M(L_0)$ [4], [8]. В репере $\mathcal{R}_L(H,M)$ плоскость $\mathcal{E}(L_0)$ задается системой уравнений

$$y^a=\mathscr{F}^a_{\hat\alpha}y^{\hat\alpha},\; y^0=\mathcal{E}_{\hat\alpha}y^{\hat\alpha};\ \text{где}\ \mathcal{E}_\alpha=\varphi_\alpha,\ \mathcal{E}_n=\mathcal{G}_n-\varphi_\alpha\mathcal{G}^\alpha_n. \tag{5.11}$$

Итак, в каждой плоскости $\mathscr{F}(L_0)$ внутренним инвариантным образом присоединены две несовпадающие между собой оснащающие по Картану плоскости $\varphi(L_0)$ и $\mathcal{E}(L_0)$ для плоскости $M(L_0)$, пересекающиеся по HM-виртуальной плоскости Кенигса $\varphi(L_0)\subset\Phi(L_0)$. Отсюда вытекает

Т е о р е м а 4. В третьей дифференциальной окрестности образующего элемента $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения внутренним инвариантным образом присоединяется к M-распределению пучок инвариантных оснащающих плоскостей в смысле Картана, осью которого является HM-виртуальная плоскость Кенигса $\varphi(L_0)\subset\Phi(L_0)$, а базисными плоскостями пучка — плоскости $\varphi(L_0)$ (5.7) и $\mathcal{E}(L_0)$ (5.11). (Этому пучку принадлежат $(n-1)$ инвариантных плоскостей, определяемых фокальными точками нормали $\mathcal{G}(L_0)$).

З а м е ч а н и е. Аналогичные конструкции, описанные в теоремах 3 и 4, могут быть ассоциированы с любой внутренней инвариантной нормалью пучков (ν, ψ_ν), $(\nu, \mathcal{G}_\nu)$, $(\psi_\nu, \mathcal{G}_\nu)$ [15].

§6. Проективные связности в Λ-подрасслоении и M-подрасслоении

1. n-мерное проективное пространство P_n будем трактовать как многообразие P^0-структуры [11], базой которого является n-мерное точечное проективное пространство, слоями — n-мерные центропроективные пространства и структурной группой — центропроективная группа.

Рассматриваемые в P_n Λ-распределение, M-распределение, H-распределение и все присоединенные к ним нормальные распределения, элементы которых являются точечными центропроективными пространствами, можно интепретировать как подрасслоения этого многообразия P^0-структуры с общим многообразием опорных образов, т.е. как Λ-подрасслоение, M-подрасслоение, H-подрасслоение, нормальные подрасслоения многообразия P^0-структуры. Следовательно, $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределение в P_n трактуется как тройка указанных подрасслоений (Λ-подрасслоение, M-подрасслоение, H-подрасслоение) многообразия P^0-структуры, в каждой точке x базы $B_n=P_n$ которого слои Λ_x, M_x, H_x этих подрасслоений удовлетворяют условию инцидентности: $\Lambda_x\subset M_x\subset H_x$. Многообразие P^0-структуры, в котором задано $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-подрасслоение (или кратко $\mathcal{H}$-подрасслоение), назовем расслоенным многообразием $P^0(\mathcal{H})$-структуры, или кратко — многообразием $P^0(\mathcal{H})$.

2. Будем считать, что репер $\mathcal{R}_L(H,M)$ адаптирован Λ-подрасслоению. В этом случае $\Lambda^i_p=0$ и формы $\theta^{\bar\varkappa}_{\bar\jmath}\equiv\omega^{\bar\varkappa}_{\bar\jmath}$ (1.17). Формы $\omega^{\bar\varkappa}_{\bar\jmath}$ в слоях многообразия $P^0(\mathcal{H})$ определяют проективную связность тогда и только тогда, когда они удовлетворяют структурным уравнениям Картана-Лаптева [3], [10]:

$$\mathcal{D}\omega^{\bar\varkappa}_{\bar\jmath}=\omega^{\bar L}_{\bar\jmath}\wedge\omega^{\bar\varkappa}_{\bar L}+R^{\bar\varkappa}_{\bar\jmath LM}\,\omega^L_0\wedge\omega^M_0. \tag{6.1}$$

Формы $\omega^{\bar p}_{\bar q}$ не удовлетворяют уравнениям вида (6.1), однако, если ввести преобразованные формы

$$\hat\omega^{\bar p}_{\bar q}=\omega^{\bar p}_{\bar q}-\eta^{\bar p}_{\bar q\varkappa}\,\omega^\varkappa_0 \tag{6.2}$$

и потребовать, чтобы формы $\hat{\omega}^{\bar p}_{\bar q}$ удовлетворяли уравнениям вида (6.1), то получим

$$\nabla\eta^{\bar p}_{\bar q k} + \Lambda^{\hat u}_{\bar q k}\,\omega^{\bar p}_{\hat u} = \eta^{\bar p}_{\bar q k L}\,\omega^{L}_{0}. \qquad (6.3)$$

Таким образом, если задать поле объекта $\eta=\{\eta^{\bar p}_{\bar q k},\ \Lambda^{\hat u}_{\bar q k}\}$, то формы (6.2) удовлетворяют уравнениям вида (6.1) и, следовательно, определяют в слоях Λ-подрасслоения проективную связность η. Связность η будет внутренне определана $\mathcal{H}$-распределением, если все компоненты $\{\eta^{\bar p}_{\bar q k}\}$ объекта η будут охвачены компонентами фундаментального объекта некоторого порядка $\mathcal{H}$-подрасслоения.

Пусть для данного Λ-подрасслоения нормальное подрасслоение (G-подрасслоение) задается полем объекта $\{G^t_{\hat u}\}$ (4.3). Тогда поле объекта $\{G_{\hat u}, G^t_{\hat u}\}$ задает оснащение по Картану Λ-подрасслоения – поле оснащающих g-плоскостей ($g_{n-r-1}(L_0)\subset G_{n-r}(L_0)$). Формулы охвата компонент $\overset{1}{\eta}{}^{\bar p}_{\bar q k}$ объекта связности $\overset{1}{\eta}$, полученной проектированием при помощи оснащающей по Картану g-плоскости [4], имеющей вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{1}{\eta}{}^{0}_{0q}=0,\ \ \overset{1}{\eta}{}^{0}_{0\hat u}=-G_{\hat u},\ \ \overset{1}{\eta}{}^{p}_{0\hat u}=G^{p}_{\hat u},\ \ \overset{1}{\eta}{}^{p}_{qt}=\Lambda^{\hat u}_{qt}G^{p}_{\hat u},\\
&\overset{1}{\eta}{}^{p}_{0q}=0,\ \ \overset{1}{\eta}{}^{p}_{q\hat u}=\Lambda^{\hat v}_{q\hat u}G^{p}_{\hat v},\ \ \overset{1}{\eta}{}^{0}_{qt}=G_{\hat v}\Lambda^{\hat v}_{qt},\ \ \overset{1}{\eta}{}^{0}_{q\hat u}=G_{\hat v}\Lambda^{\hat v}_{q\hat u}
\end{aligned}\right\}\qquad (6.4)$$

Введем еще одну связность $\overset{2}{\eta}$ на Λ-подрасслоении путем деформации связности $\overset{1}{\eta}$ при помощи тензора $T^{\bar p}_{\bar q k}$, компоненты которого имеют следующее строение:

$$\left.\begin{aligned}
&T^{0}_{0q}=B^{t}_{q}g_t;\ \ T^{0}_{0\hat u}=-B^{t}_{p}g_t G^{p}_{\hat u};\ \ T^{0}_{qt}=-B^{s}_{t}g_s g_q;\ \ T^{p}_{0\hat u}=-B^{p}_{t}G^{t}_{\hat u};\\
&T^{0}_{p\hat v}=B^{t}_{s}G^{s}_{\hat v}g_p g_t;\ \ T^{p}_{0q}=B^{p}_{q};\ \ T^{p}_{q\hat u}=B^{p}_{t}G^{t}_{\hat u}g_q;\ \ T^{p}_{qs}=-B^{p}_{s}g_q.
\end{aligned}\right\}\qquad (6.5)$$

Охват компонент $\overset{2}{\eta}{}^{\bar p}_{\bar q k}=\overset{1}{\eta}{}^{\bar p}_{\bar q k}+T^{\bar p}_{\bar q k}$ объекта связности $\overset{2}{\eta}$ осуществляется по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{2}{\eta}{}^{0}_{ps}=\Lambda^{\hat u}_{ps}G_{\hat u}-B^{t}_{s}g_t g_p;\ \ \overset{2}{\eta}{}^{0}_{p\hat v}=\Lambda^{\hat u}_{p\hat v}(G_{\hat u}-G^{t}_{\hat u}g_t)+\overset{2}{\eta}{}^{t}_{p\hat v}g_t;\\
&\overset{2}{\eta}{}^{p}_{q\hat u}=\Lambda^{\hat v}_{q\hat u}G^{p}_{\hat v}+(G^{p}_{\hat v}\Lambda^{\hat v}_{qt}-\overset{2}{\eta}{}^{p}_{qt})G^{t}_{\hat u};\ \ \overset{2}{\eta}{}^{p}_{qt}=\Lambda^{\hat u}_{qt}G^{p}_{\hat u}-B^{p}_{t}g_q;\\
&\overset{2}{\eta}{}^{0}_{0\hat u}=G_{\hat u}-B^{t}_{p}g_t G^{p}_{\hat u};\ \ \overset{2}{\eta}{}^{p}_{0\hat u}=G^{p}_{\hat u}-B^{p}_{t}G^{t}_{\hat u};\ \ \overset{2}{\eta}{}^{0}_{0q}=B^{t}_{q}g_t;\ \ \overset{2}{\eta}{}^{p}_{0q}=B^{p}_{q}.
\end{aligned}\right\}\qquad (6.6)$$

Связность $\overset{2}{\eta}$ является перспективной связностью [5].

З а м е ч а н и е. 1) Проективные связности $\overset{1}{\eta}$ и $\overset{2}{\eta}$ могут быть определены в дифференциальной окрестности 2-го порядка (это наинизший возможный порядок).

2) Аналогичные построения проективных связностей типа $\overset{1}{\eta}$ и $\overset{2}{\eta}$ для Λ-подрасслоения в дифференциальной окрестности 2-го порядка можно провести, исходя из построенных полей геометрических объектов $\{N_{\hat u}, N^{p}_{\hat u}\}$, $\{H_{\hat u}, H^{p}_{\hat u}\}$ [4], [8]. Таким образом, на Λ-подрасслоении в дифференциальной окрестности 2-го порядка можно построить три различных однопараметрических пучка связностей типа $\overset{1}{\eta}$ и соответственно три однопараметрических пучка перспективных связностей типа $\overset{2}{\eta}$.

3. Можно ввести связность $\overset{3}{\eta}$ на Λ-подрасслоении, рассматривая Λ-подрасслоение как базисное подрасслоение $\mathcal{H}(\Lambda)$-подрасслоения. Согласно работе [11] такую связность $\overset{3}{\eta}$ будем называть индуцированной проективной связностью в Λ-подрасслоении. Пусть задано нормальное G-подрасслоение. Слой H-подрасслоения сечет соответствующий слой нормального G-подрасслоения по $H\Lambda$-виртуальной нормали 1-го рода $G_{n-r-1}(L_0)$, которая определяется объектом $\{G^{p}_{u}\}$. Тогда $H\Lambda$-виртуальная оснащающая по Картану плоскость $\hat g$ соответствующего слоя Λ-подрасслоения задается объектом $\{G_u, G^{p}_{u}\}$. Кроме того, для определения проективной связности $\overset{3}{\gamma}$ [11] зададим внутренним инвариантным образом точку $\hat{\mathcal{K}}(x)\notin H_x$. В качестве такой точки $\hat{\mathcal{K}}$ возьмем точку пересечения нормали $\wp\equiv\{\wp^{\sigma}_{n}\}$ [15], соответствующей в обобщенном проективитете Бомпьяни-Пантази плоскости Нордена-Тимофеева $\mathfrak{p}$ (3.4), с гиперплоскостью $\{g_t, G_{\hat u}\}$. Формулы охвата компонент $\overset{3}{\eta}{}^{\bar p}_{\bar q k}$ объекта $\overset{3}{\eta}$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{3}{\eta}{}^{q}_{\bar p k}=\Lambda^{u}_{\bar p k}G^{q}_{u}-\Lambda^{n}_{\bar p k}\wp^{u}_{n}G^{q}_{u}+\Lambda^{n}_{\bar p k}\wp^{q}_{n},\\
&\overset{3}{\eta}{}^{0}_{\bar p k}=\Lambda^{u}_{\bar p k}G_{u}+(K_n-\wp^{u}_{n}G_u)\Lambda^{n}_{\bar p k}.
\end{aligned}\right\}\qquad (6.7)$$

Индуцированная проективная связность $\overset{3}{\gamma}$ получена проектированием при помощи оснащающей по Картану плоскости $[\hat{\mathcal{K}}, \hat g]$, натянутой на точку $\hat{\mathcal{K}}=A_n+K_n A_0+\wp^{q}_{n}A_q+\wp^{u}_{n}A_u$ и плоскость $\hat g = [\hat{\mathcal{K}}_u]=[A_u+G_u A_0+G^{t}_{u}A_t]$, где $K_n = g_t\wp^{t}_{n}+G_u\wp^{u}_{n}+G_n$.

З а м е ч а н и е. I) При построении проективной связности $\overset{3}{\eta}$ в Λ-подрасслоении можно исходить из задания нормального подрасслоения,определенного любым из объектов $\{G^{t}_{\hat{u}}\}$, $\{H^{t}_{\hat{u}}\}$, $\{N^{t}_{\hat{u}}\}$. В качестве инвариантной точки $\widehat{\mathcal{K}}$ можно взять точку пересечения произвольной нормали,взятой из пучков (ν,ψ_ν), (ν,q_ν), (ψ_ν, q_ν) [15], с соответствующей гиперплоскостью $(g_t, G_{\hat u})$, $(h_t, H_{\hat u})$, $(n_t, N_{\hat u})$.

2) Другой способ построения индуцированных связностей типа $\overset{2}{\eta}$ в Λ-подрасслоении состоит в использовании при их построении пучка оснащающих плоскостей в смысле Картана,введенного для Λ-подрасслоения в теореме 3.

4.Формы

$$\widetilde{\omega}^{\bar a}_{\bar\ell} = \omega^{\bar a}_{\bar\ell} - \gamma^{\bar a}_{\bar\ell K}\,\omega^{K}_{0} \qquad (6.8)$$

тогда и только тогда удовлетворяют уравнениям вида (6.1),когда функции $\gamma^{\bar a}_{\bar\ell K}$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\gamma^{\bar a}_{\bar\ell K} + M^{\hat\alpha}_{\bar\ell K}\,\omega^{\bar a}_{\hat\alpha} = \gamma^{\bar a}_{\bar\ell K L}\,\omega^{L}_{0}. \qquad (6.9)$$

Итак,если задать поле объекта $\gamma = \{\gamma^{\bar a}_{\bar\ell K},\ M^{\hat\alpha}_{\bar\ell K}\}$, то формы (6.8) определяют в слоях M-подрасслоения проективную связность γ. Связность γ будет внутренне определена $\mathcal{H}$-подрасслоением,если все компоненты $\gamma^{\bar\ell}_{\bar a K}$ объекта γ будут охвачены компонентами фундаментального объекта некоторого порядка $\mathcal{H}$-подрасслоения.Все исследования,проведенные в п.2 и 3 §6, переносятся и на M-подрасслоение данного $\mathcal{H}$-подрасслоения. Поэтому мы приведем только охваты компонент объектов связностей $\overset{1}{\gamma},\overset{2}{\gamma},\overset{3}{\gamma}$ M-подрасслоения,которые однотипны соответственно связностям $\overset{1}{\eta},\overset{2}{\eta},\overset{3}{\eta}$ Λ-подрасслоения: а) Формулы охвата компонент $\overset{1}{\gamma}{}^{\bar\ell}_{\bar a K}$ объекта связности $\overset{1}{\gamma}$, полученной проектированием при помощи оснащающей по Картану плоскости $\{M^{a}_{\hat\alpha},\ M_{\hat\alpha}\}$:

$$\left.\begin{aligned}&\overset{1}{\gamma}{}^{a}_{0b}=0,\ \overset{1}{\gamma}{}^{0}_{0\hat\alpha}=M_{\hat\alpha},\ \overset{1}{\gamma}{}^{a}_{0\hat\alpha}=M^{a}_{\hat\alpha},\ \overset{1}{\gamma}{}^{a}_{bc}=M^{\hat\alpha}_{bc}M^{a}_{\hat\alpha},\\&\overset{1}{\gamma}{}^{0}_{0b}=0,\ \overset{1}{\gamma}{}^{a}_{b\hat\alpha}=M^{\hat\beta}_{b\hat\alpha}M^{a}_{\hat\beta};\ \overset{1}{\gamma}{}^{0}_{ab}=M_{\hat\alpha}M^{\hat\alpha}_{ab};\ \overset{1}{\gamma}{}^{0}_{a\hat\alpha}=M_{\hat\beta}M^{\hat\beta}_{a\hat\alpha},\end{aligned}\right\} \qquad (6.10)$$

где

$$M_{\hat\alpha}=-\tfrac{1}{m}\left(M^{a}_{\hat\alpha a}-M^{a}_{\hat\alpha}M^{b}_{\hat\beta}M^{\hat\beta}_{ab}\right),\quad \hat g_a=-\tfrac{1}{n-m}\left(M^{\hat\beta}_{a\hat\beta}+M^{\hat\beta}_{ab}M^{b}_{\hat\beta}\right).$$

б)Формулы охвата компонент $\overset{2}{\gamma}{}^{\bar\ell}_{\bar a K}=\overset{1}{\gamma}{}^{\bar\ell}_{\bar a K}+\widetilde{T}^{\bar\ell}_{\bar a K}$ объекта перспективной связности $\overset{2}{\gamma}$:

$$\left.\begin{aligned}&\overset{2}{\gamma}{}^{b}_{0a}=M^{b}_{a};\ \overset{2}{\gamma}{}^{b}_{0\hat\alpha}=M^{b}_{\hat\alpha}-M^{b}_{c}M^{c}_{\hat\alpha};\ \overset{2}{\gamma}{}^{0}_{0a}=M^{b}_{a}\hat g_b;\ \overset{2}{\gamma}{}^{0}_{0\hat\alpha}=M_{\hat\alpha}-\overset{2}{\gamma}{}^{0}_{0b}M^{b}_{\hat\alpha};\\&\overset{2}{\gamma}{}^{a}_{b\hat\alpha}=M^{\hat\beta}_{b\hat\alpha}M^{a}_{\hat\beta}+\left(M^{a}_{\hat\beta}M^{\hat\beta}_{bc}-\overset{2}{\gamma}{}^{a}_{bc}\right)M^{c}_{\hat\alpha};\ \overset{2}{\gamma}{}^{a}_{bc}=M^{\hat\alpha}_{bc}M^{a}_{\hat\alpha}-M^{a}_{c}\hat g_b;\\&\overset{2}{\gamma}{}^{0}_{a\hat\alpha}=M^{\hat\beta}_{a\hat\alpha}\left(M_{\hat\beta}-M^{b}_{\hat\beta}\hat g_b\right)+\overset{2}{\gamma}{}^{b}_{a\hat\alpha}\hat g_b;\ \overset{2}{\gamma}{}^{0}_{ab}=M^{\hat\alpha}_{ab}M_{\hat\alpha}-M^{c}_{b}\hat g_c\hat g_a.\end{aligned}\right\} \qquad (6.11)$$

в) Охват компонент $\overset{3}{\gamma}{}^{\bar\ell}_{\bar a K}$ объекта индуцированной проективной связности осуществляется по формулам:

$$\left\{\begin{aligned}&\overset{3}{\gamma}{}^{b}_{\bar a K}=M^{\alpha}_{\bar a K}G^{b}_{\alpha}-M^{n}_{\bar a K}\psi^{\alpha}_{n}G^{b}_{\alpha}+M^{n}_{\bar a K}\psi^{b}_{n},\\&\overset{3}{\gamma}{}^{0}_{\bar a K}=M^{\alpha}_{\bar a K}G_{\alpha}+\left(K_n-\psi^{\alpha}_{n}G_{\alpha}\right)M^{n}_{\bar a K}.\end{aligned}\right. \qquad (6.12)$$

Индуцированная проективная связность $\overset{3}{\gamma}$ получена проектированием при помощи оснащающей по Картану плоскости $[\widetilde{\mathcal{K}},\widetilde{g}]$,натянутой на точку $\widetilde{\mathcal{K}}=A_n+\widetilde{K}_n A_0+\psi^{b}_{n}A_b+\psi^{\alpha}_{n}A_\alpha$ и плоскость $\widetilde{g}=[A_\alpha+G_\alpha A_0+G^{b}_{\alpha}A_b]$, где $\widetilde{K}_n=\hat g_b\psi^{b}_{n}+G_\alpha\psi^{\alpha}_{n}+G_n$; $G_{\hat\alpha}=M_{\hat\alpha}-M^{a}_{\hat\alpha}\hat g_a$.

§7. Связность в H-подрасслоении

1.Пусть формы $\hat\omega^{\bar\sigma}_{\bar\xi}=\omega^{\bar\sigma}_{\bar\xi}-\Gamma^{\bar\sigma}_{\bar\xi K}\omega^{K}_{0}$ определяют проективную связность Γ в слоях H-подрасслоения.Значит,на базе $B_n=P_n$ задано поле геометрического объекта $\Gamma=\{\Gamma^{\bar\sigma}_{\bar\xi K},\ H^{n}_{\bar\xi K}\}$, определяемое дифференциальными уравнениями

$$\nabla\Gamma^{\bar\sigma}_{\bar\xi K}+H^{n}_{\bar\xi K}\,\omega^{\bar\sigma}_{n}=\Gamma^{\bar\sigma}_{\bar\xi K L}\,\omega^{L}_{0}, \qquad (7.1)$$

$$\nabla H^{n}_{\bar\xi K}-\delta^{n}_{K}\,\omega^{0}_{\bar\xi}=H^{n}_{\bar\xi K L}\,\omega^{L}_{0},\quad H^{n}_{0K}=\delta^{n}_{K}. \qquad (7.2)$$

Определим связность Γ в слоях H-подрасслоения путем проектирования из точки $\widehat{\mathcal{K}}$ [11],лежащей на нормали ψ:

$$\Gamma^{\bar\sigma}_{\bar\xi K}=H^{n}_{\bar\xi K}\psi^{\bar\sigma}_{n},\quad \psi^{0}_{n}=K_n. \qquad (7.3)$$

Оказывается,что компоненты объекта индуцированной проективной связности $\overset{3}{\gamma}$ на M-подрасслоении могут быть охвачены компонентами геометрического объекта $\{\Gamma,\Lambda^{\bar u}_{pK};\ G_u,\ G^{p}_{u}\}$:

$$\begin{aligned}&\overset{3}{\gamma}{}^{0}_{0c}=\Gamma^{0}_{0c};\ \overset{3}{\gamma}{}^{0}_{0\alpha}=\Gamma^{0}_{0\alpha}+G_\alpha;\ \overset{3}{\gamma}{}^{0}_{0n}=\Gamma^{0}_{0n}-G_\alpha\Gamma^{\alpha}_{0n};\ \overset{3}{\gamma}{}^{b}_{0a}=\Gamma^{b}_{0a};\\&\overset{3}{\gamma}{}^{b}_{aK}=\Gamma^{b}_{aK}+\left(M^{\alpha}_{aK}-M^{n}_{aK}\Gamma^{\alpha}_{0n}\right)G^{b}_{\alpha};\ \overset{3}{\gamma}{}^{0}_{aK}=\Gamma^{0}_{aK}+\left(M^{\alpha}_{aK}-M^{n}_{aK}\Gamma^{\alpha}_{0n}\right)G_\alpha;\\&\overset{3}{\gamma}{}^{b}_{0\alpha}=\Gamma^{b}_{0\alpha}+G^{b}_{\alpha};\ \overset{3}{\gamma}{}^{b}_{0n}=\Gamma^{b}_{0n}-G^{b}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{0n}.\end{aligned} \qquad (7.4)$$

Аналогично устанавливается связь между компонентами объектов Γ (7.3) и $\overset{3}{\eta}$ (6.7):

$$\begin{aligned}&\overset{3}{\eta}{}^{0}_{0q}=\Gamma^{0}_{0q};\ \overset{3}{\eta}{}^{0}_{0u}=\Gamma^{0}_{0u}+G_u;\ \overset{3}{\eta}{}^{0}_{0n}=\Gamma^{0}_{0n}-G_u\Gamma^{u}_{0n};\ \overset{3}{\eta}{}^{p}_{0q}=\Gamma^{p}_{0q};\\&\overset{3}{\eta}{}^{p}_{qK}=\Gamma^{p}_{qK}+\left(\Lambda^{v}_{qK}-\Lambda^{n}_{qK}\Gamma^{v}_{0n}\right)G^{p}_{v};\ \overset{3}{\eta}{}^{0}_{pK}=\Gamma^{0}_{pK}+\left(\Lambda^{u}_{pK}-\Lambda^{n}_{pK}\Gamma^{u}_{0n}\right)G_u;\\&\overset{3}{\eta}{}^{p}_{0u}=\Gamma^{p}_{0u}+G^{p}_{u};\ \overset{3}{\eta}{}^{p}_{0n}=\Gamma^{p}_{0n}-G^{p}_{u}\Gamma^{u}_{0n}.\end{aligned} \qquad (7.5)$$

Связность Γ индуцирует в слоях Λ-подрасслоений (согласно работе [11]) $H\Lambda$-виртуальную проективную связность $\overset{4}{\eta}$:

$$\overset{4}{\eta}{}^{\bar p}_{oq} = 0, \quad \overset{4}{\eta}{}^{p}_{on} = 0, \quad \overset{4}{\eta}{}^{o}_{on} = 0, \quad \overset{4}{\eta}{}^{p}_{ou} = G^{p}_{u}; \qquad \overset{4}{\eta}{}^{p}_{qk} = \Lambda^{v}_{qk} G^{p}_{v}; \quad \overset{4}{\eta}{}^{o}_{ou} = G_{u}; \quad \overset{4}{\eta}{}^{o}_{pk} = \Lambda^{v}_{pk} G_{v}, \tag{7.6}$$

а в слоях M-подрасслоения HM-виртуальную проективную связность $\overset{4}{\gamma}$:

$$\overset{4}{\gamma}{}^{\bar b}_{oa} = 0, \quad \overset{4}{\gamma}{}^{\bar b}_{on} = 0; \quad \overset{4}{\gamma}{}^{b}_{o\alpha} = G^{b}_{\alpha}; \quad \overset{4}{\gamma}{}^{b}_{ak} = M^{\alpha}_{ak} G^{b}_{\alpha}; \qquad \overset{4}{\gamma}{}^{o}_{o\alpha} = G_{\alpha}; \quad \overset{4}{\gamma}{}^{o}_{ak} = M^{\alpha}_{ak} G_{\alpha}. \tag{7.7}$$

2.Наконец, введем в слоях H-подрасслоения π-связность $\overset{1}{\Gamma}$ композиции (M,Φ) [2], определяемой M-подрасслоением и Φ-подрасслоением [11]:

$$\begin{gathered}
\overset{1}{\Gamma}{}^{\sigma}_{ok} = \delta^{\sigma}_{k}; \quad \overset{1}{\Gamma}{}^{o}_{o\sigma} = g_{\sigma}; \quad \overset{1}{\Gamma}{}^{o}_{on} = \mathfrak{g}_{n} - \overset{1}{\Gamma}{}^{o}_{o\sigma}\mathfrak{g}^{\sigma}_{n}; \quad \overset{1}{\Gamma}{}^{a}_{bk} = H^{n}_{bk}\mathfrak{g}^{a}_{n} - \delta^{a}_{k}h_{b};\\
\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{ab} = H^{n}_{ab}\mathfrak{g}^{\alpha}_{n}; \quad \overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{a\beta} = M^{\alpha}_{a\beta}; \quad \overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{an} = H^{n}_{an}\mathfrak{g}^{\alpha}_{n} + (M^{n}_{a\beta}\mathfrak{g}^{\alpha}_{n} - M^{\alpha}_{a\beta})\mathfrak{g}^{\beta}_{n};\\
\overset{1}{\Gamma}{}^{a}_{\beta b} = \varphi^{a}_{\beta b}; \quad \overset{1}{\Gamma}{}^{b}_{\alpha\beta} = H^{n}_{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{b}_{n}; \quad \overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta k} = H^{n}_{\beta k}\mathfrak{g}^{\alpha}_{n} - \delta^{\alpha}_{k}g_{\beta}; \quad \overset{1}{\Gamma}{}^{o}_{\alpha a} = \varphi^{b}_{\alpha a}g_{b};\\
\overset{1}{\Gamma}{}^{b}_{\alpha n} = H^{n}_{\alpha n}\mathfrak{g}^{b}_{n} - \varphi^{b}_{\alpha c}\mathfrak{g}^{c}_{n}; \quad \overset{1}{\Gamma}{}^{o}_{ab} = H^{n}_{ab}\mathfrak{g}_{n} - h_{a}h_{b}; \quad \overset{1}{\Gamma}{}^{o}_{\alpha\beta} = H^{n}_{\alpha\beta}\mathfrak{g}_{n} - g_{\alpha}g_{\beta};\\
\overset{1}{\Gamma}{}^{o}_{a\beta} = H^{n}_{a\beta}\mathfrak{g}_{n} + (M^{\gamma}_{a\beta} - M^{n}_{a\beta}\mathfrak{g}^{\gamma}_{n})g_{\gamma}; \quad \overset{1}{\Gamma}{}^{o}_{\sigma n} = H^{n}_{\sigma n}\overset{1}{\Gamma}{}^{o}_{on} + \overset{1}{\Gamma}{}^{a}_{\sigma n}h_{a} + \overset{1}{\Gamma}{}^{\beta}_{\sigma n}g_{\beta}.
\end{gathered} \tag{7.8}$$

Формулы охвата компонент $\overset{2}{\Gamma}{}^{\bar\sigma}_{\xi k}$ объекта π-связности $\overset{2}{\Gamma}$ композиции (Λ,X), определяемой Λ-подрасслоением и X-подрасслоением, имеют вид [11]:

$$\begin{gathered}
\overset{2}{\Gamma}{}^{\sigma}_{ok} = \delta^{\sigma}_{k}; \quad \overset{2}{\Gamma}{}^{o}_{o\sigma} = \mathfrak{z}_{\sigma}; \quad \overset{2}{\Gamma}{}^{o}_{on} = \mathfrak{p}_{n} - \overset{2}{\Gamma}{}^{o}_{o\sigma}\mathfrak{p}^{\sigma}_{n}; \quad \overset{2}{\Gamma}{}^{p}_{qk} = H^{n}_{qk}\mathfrak{p}^{p}_{n} - \delta^{p}_{k}f_{q};\\
\overset{2}{\Gamma}{}^{v}_{pq} = H^{n}_{pq}\mathfrak{p}^{v}_{n}; \quad \overset{2}{\Gamma}{}^{v}_{pw} = \Lambda^{v}_{pw}; \quad \overset{2}{\Gamma}{}^{v}_{pn} = H^{n}_{pn}\mathfrak{p}^{v}_{n} + (\Lambda^{n}_{pu}\mathfrak{p}^{v}_{n} - \Lambda^{v}_{pu})\mathfrak{p}^{u}_{n};\\
\overset{2}{\Gamma}{}^{p}_{wq} = X^{p}_{wq}; \quad \overset{2}{\Gamma}{}^{q}_{vu} = H^{n}_{vu}\mathfrak{p}^{q}_{n}; \quad \overset{2}{\Gamma}{}^{v}_{wk} = H^{n}_{wk}\mathfrak{p}^{v}_{n} - \delta^{v}_{k}\mathfrak{z}_{w}; \quad \overset{2}{\Gamma}{}^{o}_{wq} = X^{p}_{wq}f_{p};\\
\overset{2}{\Gamma}{}^{p}_{wn} = H^{n}_{wn}\mathfrak{p}^{p}_{n} - X^{p}_{wq}\mathfrak{p}^{q}_{n}; \quad \overset{2}{\Gamma}{}^{o}_{pq} = H^{n}_{pq}\mathfrak{p}_{n} - f_{p}f_{q}; \quad \overset{2}{\Gamma}{}^{o}_{uv} = H^{n}_{uv}\mathfrak{p}_{n} - \mathfrak{z}_{u}\mathfrak{z}_{v};\\
\overset{2}{\Gamma}{}^{o}_{pu} = H^{n}_{pu}\mathfrak{p}_{n} + (\Lambda^{v}_{pu} - \Lambda^{n}_{pu}\mathfrak{p}^{v}_{n})\mathfrak{z}_{v}; \quad \overset{2}{\Gamma}{}^{o}_{\sigma n} = H^{n}_{\sigma n}\overset{2}{\Gamma}{}^{o}_{on} + \overset{2}{\Gamma}{}^{p}_{\sigma n}f_{p} + \overset{2}{\Gamma}{}^{u}_{\sigma n}\mathfrak{z}_{u}.
\end{gathered} \tag{7.9}$$

Связность $\overset{1}{\Gamma}$ ($\overset{2}{\Gamma}$) индуцирована полем объекта, определяющего плоскость Нордена-Тимофеева $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{P}$) соответствующей композиции и точкой Кенигса $\underset{(\mathfrak{G})}{K}$ ($\underset{(\mathfrak{P})}{K}$) на нормали $\mathfrak{G}$($\mathfrak{P}$), соответствующей плоскости $\mathfrak{g}$($\mathfrak{p}$) в проективитете Бомпьяни-Пантази.

Библиографический список

1. Б а л а з ю к Т.Н. Дифференциальная геометрия m-мерных линейных элементов, оснащенных конусом.I // ВИНИТИ. М., 1978. 35С. Библиогр. 13 назв. Деп. в ВИНИТИ 24.01.1978, № 267-78 Деп.

2. Д о м б р о в с к и й Р.Ф. О неголономных композициях на поверхностях $M_{m,r}$ в P_n // Тез.докл.Всес.научн.конф. по неевклидовой геометрии 150 лет геометрии Лобачевского", Казань, 1976. М., 1976. С.69.

3. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр.Моск.матем.о-ва.М., 1953. № 2. С.275-382.

4. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I // Тр.Геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

5. Л у м и с т е Ю.Г. Канонические расслоения над пространствами орбит и внутренние связности // Тр.Геометр.семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.285-307.

6. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

7. Н о р д е н А.П., Т и м о ф е е в Г.Н. Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств // Изв.вузов.Математика. 1972. №8 (123). С.81-89.

8. О с т и а н у Н.М. Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II // Тр. геометр.семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.95-114.

9. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр.Геометр.семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.71-120.

10. О с т и а н у Н.М., Р ы ж к о в В.В., Ш в е й к и н П.Н. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. Геометр.семинара./ ВИНИТИ . .М.,1973.Т.4.С.7-70.

11. О с т и а н у Н.М., Б а л а з ю к Т.Н. Многообразия, погруженные в пространства проективной структуры // Проблемы геометрии / ВИНИТИ . М.,1978.Т.10.С.75-115.

12. П о п о в Ю.И. О проективно-дифференциальной геометрии двухсоставного гиперполосного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ // Тезисы докл. 7-й Всес.конф. по современным проблемам геометрии. Минск,1979.С.160.

13. П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства,ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства.I/ Калинингр.ун-т.Калининград,1984.93с. Библиогр.: 21 назв.Деп. в ВИНИТИ 2.07.84,№ 4481-84 Деп.

14. П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства,ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределением проективного пространства.II/ Калинингр.ун-т.Калининград,1984.36с.Библиогр.:8 назв.Деп. в ВИНИТИ 9.01.85,№ 252-85Деп.

15. П о п о в Ю.И. Об одномерных нормалях первого рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения // Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1985.Вып.16. С.57-66.

16. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ М.,1975.Т.7.С.117-151.

17. Ш е й д о р о в а Н.М. К геометрии двухсоставных распределений $\mathcal{H}^{\tau}_{m} \subset P_n$ // Дифф.геометрия многообразий фигур: Сб. науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград,1983.Вып.14.С.111-115.

УДК 514.75

ПАРЫ θ КОНГРУЭНЦИЙ С ЗАДАННЫМ СООТНОШЕНИЕМ АБСЦИСС ФОКУСОВ

О.С.Р е д о з у б о в а

(МГПИ им.В.И.Ленина)

В трехмерном евклидовом пространстве рассматриваются пары θ конгруэнций,у которых абсциссы фокусов удовлетворяют условию $\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'$,т.е. абсциссы соответствующих фокусов обратно пропорциональны.

Парами θ конгруэнций называются такие пары $\{r_1\},\{r_2\}$, фокусы которых F_1,F_1',F_2,F_2' удовлетворяют двум условиям: а)касательные плоскости фокальных поверхностей $(F_1),(F_1')$ проходят соответственно через точки F_2,F_2'; б)касательные плоскости фокальных поверхностей $(F_2),(F_2')$ -через точки F_1',F_1 соответственно.

С парой конгруэнций $\{r_a\}$ $(a=1,2)$ связана конгруэнция общих перпендикуляров $\{r\}$.Прямые r пересекают r_a соответственно в точках K_a. Используется подвижный ортонормированный репер $R=(O,\bar{e}_i)$($i=1,2,3$),где $O\in r, \bar{e}_3 \parallel r$. Прямые r_a образуют с $\bar{e}_1$ углы α_a; $\bar{\eta}_a \parallel r_a$, $\bar{\eta}_a=\bar{e}_1\cos\alpha_a+\bar{e}_2\sin\alpha_a$.
По отношению к реперам $(K_a,\bar{\eta}_a)$ фокусы конгруэнций $\{r_a\}$ F_a,F_a' имеют координаты ρ_a,ρ_a' ;координаты точек K_a относительно репера $(O,\bar{e}_3)$ на прямой r обозначим h_a.

Известно [1,с.4] ,что существует четыре класса пар θ конгруэнций: $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$. Пары θ_1 наиболее общие,они характеризуются условиями: $\rho_1'\rho_2 \neq \rho_1\rho_2'$, $\rho_1\rho_2\neq\rho_1'\rho_2'$.Пары θ_2 -пары, определяемые условием $\rho_1'\rho_2=\rho_1\rho_2'$. Если абсциссы фокусов отличны от нуля,то у таких пар абсциссы фокусов одной конгруэнции прямо пропорциональны абсциссам фокусов другой.Пары θ_3 определяются равенством $\rho_1\rho_2=\rho_1'\rho_2'$. У них абсциссы фокусов одной конгруэнции обратно пропорциональны абсциссам фокусов другой. Наконец, θ_4-пары θ, соответствующие прямые которых пересечены прямыми конгруэнции общих перпендикуляров в центрах этих прямых.Обозначим буквой $\bar{\theta}$ пары θ конгруэнций,у которых